

# 十二年國教課程前導學校協作計畫

## ～新北市立江翠國民中學素養導向教學活動設計～

### 一、課程主題：藝數密碼（校本跨領域課程）

主要領域：數學

次要領域：藝術（視覺藝術）

其他領域：科技（資訊）

### 二、設計理念

汲取鑲嵌藝術歷史脈絡中與國中數學相關的部分，期盼藉由學生實際探索各種鑲嵌圖形，了解其中組成的源由，並利用動態幾何軟體 **GSP** 讓學生在自由迅速製作多邊形的過程中，引發幾何性質的發現、檢驗，進行正確的幾何性質解釋與推理。且藉由進一步將幾何性質轉換成方程式的代數分析，全面探索各種正則與半正則的鑲嵌圖形。另介紹埃舍爾(M.C.Escher) 的作品，期盼學生獲得數學與藝術結合的養分，掌握其中隱含的幾何知識和技巧，畫出自己獨特的鑲嵌圖案，真實感受學習幾何的樂趣和興奮，期盼假以時日學生能更主動的探索數學領域中尚未突破的問題。

### 二、主題架構圖

主題	單元	活動名稱	學習脈絡	活動學習目標	關鍵提問/引導
藝數密碼	一、幾何密碼	古墓探秘	以數學觀點粗略分析鑲嵌圖形	1.察覺生活情境中密鋪與鑲嵌的數學價值。 2.分析密鋪與鑲嵌所隱藏的數學性質。	1.在生活中你發現了哪些密鋪與鑲嵌的圖案？它常在哪些場域出現？ 2.哪些正多邊形可以鋪滿整個平面嗎？述明理由與所遭遇的困難。
		神兵奇器	運用數位工具探究正多邊形鑲嵌圖形的數學規律性	3.熟悉動態幾何軟體 <b>GSP</b> ，學會繪製、測量多邊形的角與邊長。 4.能透過操作進行歸納、推理，找出密鋪平面的規律，並拼出所有正則鑲嵌類型。	3.利用 <b>GSP</b> 探究哪些正多邊形可以鋪滿整個平面嗎？請歸納結果並分享。
	二、鑲嵌藝數	城邦鑲嵌圖飾的排列	探究結合二種以上之正多邊形鑲嵌圖案的類型並運用數學方式分析其合理性	5.能利用正多邊形角度關係拼出半正則鑲嵌圖案類型。 6.能利用代數分析的方法，說明半正則鑲嵌圖形排列的合理性。	4.利用 <b>GSP</b> ，能拼出的半正則鑲嵌圖形有哪些？ 5.利用邊長相等的正三角形和正方形模板拼出一個凸 11 邊形，它的內角各是多少度？

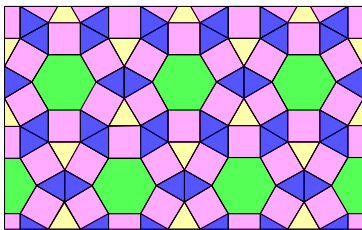
		鑲嵌圖飾的變異性排列	探究不完全正則鑲嵌圖形類型及其數學幾何意義	7.能辨識與排列半正則與不完全正則鑲嵌圖形。	6.下列各鑲嵌圖案的是何種類型？請以數字名稱表示出來。 7.請排出不完全正則鑲嵌圖案 3,12,12/3,4,3,12，並在紙上畫出此圖案，且進行著色。
		神秘電郵的圖形密碼	加入圖形外心、邊長中點連線、與非等邊之變異因素豐富鑲嵌圖形的變化性	8.能了解對偶圖與頂點鑲嵌圖形的意義。 9.能畫出正則與半正則鑲嵌的對偶與頂點圖形，且能加以解釋和分析。 10.能了解任意三角形和四邊形密鋪整個平面的原因。 11.能排出非等邊五、六邊形的鑲嵌圖形並進行可行性的檢驗。	8.任意三角形或四邊形都能鑲滿整個平面嗎？ 9.試試非正五邊形，它能鑲滿整個平面嗎？ 10.試試非正六邊形或圓弧形，是否能鑲滿整個平面嗎？
		寶物碎片	運用圖形變化技巧進行鑲嵌圖形創作	12.能理解 M.C.Escher 在鑲嵌圖形設計上的方法。 13.能運用平移、旋轉與鏡射等技巧創造屬於自己的鑲嵌圖形。	11.選擇一簡單圖形為鑲嵌背景，運用平移、旋轉、鏡射法則，設計一鑲滿平面的圖案，並塗上顏色。

#### 四、主題摘要表

主題名稱	藝數密碼	教學對象	九年級學生	上課節數	20 節
學習前置經驗	學生能使用形體的性質描述某一類形體，並利用構成要素間的可能關係，描述複合形體間的可能關係。				
課程核心素養	<p>數-J-A2 具備有理數、根 式、坐標系之運 作能力，並能以符號代表數或 幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。</p> <p>數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。</p> <p>數-J-B3 具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。</p> <p>數-J-C3 具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養。</p>				
主題學習目標	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.探索各種鑲嵌圖形，了解其中組成源由，並能經由操弄作幾何性質解釋。</li> <li>2.提升學生幾何思維層次，並能做非形式演繹的論證。</li> <li>3.理解鑲嵌圖案設計的方法，並嘗試運用幾何知識和技巧，創造鑲嵌圖形。</li> <li>4.引導學生以數學認知的觀點發現美感的普遍性與獨特性。</li> <li>5.透過數學與藝術間搭起的橋樑，激發學生思維與行動的創造力。</li> <li>6.培養學生主動探索、獨力創作與團體分享的能力。</li> </ol>				
學習表現	<p>s-IV-1 理解常用幾何形體的定義、符號、性質，並應用於幾何問題的解題。</p> <p>s-IV-2 理解角的各種性質、三角形與凸多邊形的內角和外角的意義、三角形的外角和、與凸多邊形的內角和，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。</p> <p>s-IV-4 理解平面圖形全等的意義，知道圖形經平移、旋轉、鏡射後仍保持全等，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。</p> <p>s-IV-5 理解線對稱的意義和線對稱圖形的幾何性質，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。</p> <p>s-IV-8 理解特殊三角形（如正三角形、等腰三角形、直角三角形）、特殊四邊形（如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、箏形、梯形）和正多邊形的幾何性質及相關問題。</p>				
學習表現說明	<p>S-8-1 角：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。</p> <p>S-8-2 凸多邊形的內角和：凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；三角形外角性質；正 <math>n</math> 邊形的每個內角度數。</p> <p>S-8-4 全等圖形：全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉 或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等（反之亦然）。</p> <p>S-8-7 平面圖形的面積：正三角形的高與面積公式；箏形面積；及其相關之複合圖形的面積。</p> <p>S-8-9 平行四邊形的基本性質：關於平行四邊形的內角、邊、對角線等的幾何性質。</p>				

	<p>S-8-10 正方形、長方形、箏形的基本性質：長方形的對角線等 長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線，其逆命題亦成立。</p> <p>S-8-11 梯形的基本性質：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形。</p> <p>S-9-12 證明的意義：幾何推理（須說明所依據的幾何性質）；代數推理（須說明所依據的代數性質）。</p>
實質學習內容	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 覺察生活情境中密鋪與鑲嵌的數學價值，並分析其所隱藏的數學性質。</li> <li>2. 熟悉動態幾何軟體 GSP，學會如何拉動線段、角，以及複製多邊形，測量多邊形的角與邊長。</li> <li>3. 能操作紙板或運用 GSP 繪製的模板，透過歸納、推理的方法，找出能否密鋪平面的規律，並拼出所有正則鑲嵌類型。</li> <li>4. 能利用角度關係或代數分析的分法，拼出所有半正則鑲嵌類型。</li> <li>5. 能辨識與操弄半正則鑲嵌與不完全正則鑲嵌之圖形，並做出幾何上的解釋。</li> <li>6. 能了解對偶圖形與頂點圖形的意義，並畫出正則與半正則鑲嵌的對偶圖形與頂點圖形，且能加以解釋和分析。</li> <li>7. 能操作紙板或 GSP 提供的模版，將任意三角形和四邊形密鋪整個平面，並了解其能排出鑲嵌圖形的原因。</li> <li>8. 能運用動態幾何軟體 GSP，排出不等邊五、六邊形的鑲嵌圖形，並進行可行性的檢驗。</li> <li>9. 能理解 M.C.Escher 在鑲嵌圖形設計上的方法，並運用平移、旋轉與鏡射等技巧創造屬於自己的鑲嵌圖形。</li> </ol>
與其他領域的連結	<p>藝術領域</p> <p>視 1-IV-1 能使用構成要素和形式原理，表達情感與想法。</p> <p>視 2-IV-2 能理解視覺符號的意義，並表達多元的觀點。</p> <p>視 3-IV-3 能應用設計式思考及藝術知能，因應生活情境尋求解決方案。</p> <p>自然領域</p> <p>pa-IV-1 能分析歸納、製作圖表、使用資訊與數學等方法，整理資訊或數據。</p> <p>pa-IV-2 能運用科學原理、思考智能、數學等方法，從（所得的）資訊或數據，形成解釋、發現新知、獲知因果關係、解決問題或是發現新的問題。並能將自己的探究結果和同學的結果或其它相關的資訊比較對照，相互檢核，確認結果。</p> <p>ai-IV-1 動手實作解決問題或驗證自己想法，而獲得成就感。</p> <p>生活科技領域</p> <p>資 c-IV-1 能熟悉資訊科技共創工具的使用方法。</p> <p>資 c-IV-3 能應用資訊科技與他人合作進行數位創作。</p>
議題融入	<p>多元文化教育－認識文化的豐富與多樣性；養成尊重差異與追求實質平等的跨文化素養；維護多元文化價值。</p>

## 五、教學流程表

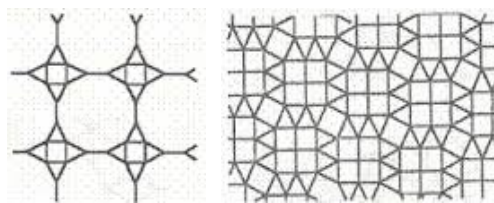
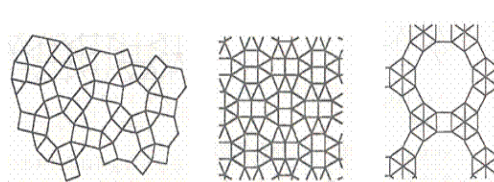
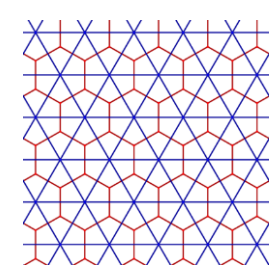
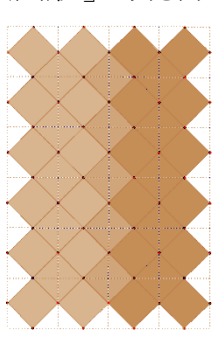
單元名稱	一、幾何密碼		上課節數	4 節
單元學習目標	1. 覺察生活情境中密鋪與鑲嵌的數學價值，並分析其所隱藏的數學性質。 2. 熟悉動態幾何軟體 GSP，學會如何拉動線段、角，以及複製多邊形，測量多邊形的角與邊長。 3. 能操作紙板或運用 GSP 繪製的模板，透過歸納、推理的方法，找出能否密鋪平面的規律，並拼出所有正則鑲嵌類型。			
學習情境與動機引發	藉由觀看電影「古墓奇兵」之古埃及神秘隧道中的圖案，及教堂常見之鑲嵌圖形與學校地磚的編排，引發學生探究與繪製的興趣，感受學習幾何的樂趣與興奮，提升學習動能。			
學習表現說明	活動學習目標	學習活動歷程	評量方法	教學策略
	1. 察覺生活情境中密鋪與鑲嵌的數學價值。 2. 分析密鋪與鑲嵌所隱藏的數學性質。	<b>活動一、古墓探秘（1 節）</b> 1. 在生活中你發現了哪些密鋪與鑲嵌的圖案？它常在哪些場域出現？ 經由小組討論發表影片、教堂佈置與學校地磚的擺置的共同特色與引人注意之處，並引導學生聚焦組成的基本形狀及圖案的無限延伸性。  2. 聚焦圖案延伸性，引導學生進行下列問題的討論。 (1) 正方形可以鋪滿整個平面嗎？ (2) 正三角形可以鋪滿整個平面嗎？ (3) 正五邊形、正六邊形、.....可以鋪滿整個平面嗎？哪些正多邊形可以？利用模板動手操作，再歸納發現與結論，並述明理由與所遭遇的困難之處。	形成性： 拼排方法/ 拼排類型/ 討論情形/ 源由與困難分享	1. 分組教學，教師說明情境議題，並確認學生理解情形。 2. 學生分組拼排模板、討論並發表。 3. 引導發現有限的模板類型侷限歸納結果之困難。
	3. 熟悉動態幾何軟體 GSP，學會繪製、測量多邊形的角與邊長。	<b>活動二、神兵奇器（3 節）</b> 1. 藉由前一活動學生操弄模板的侷限性與繪製多邊形的困難，所導致結論歸納的不確定性，引入動態幾何軟體來讓學生體會有「神兵奇器」輔助的必要性。引導學生熟悉	形成性： 軟體操作/ 多邊形模板繪製/模板製作/拼排策略/	1. 介紹動態幾何軟體 GSP 的操作環境，並進行幾何圖形繪製（與資

	4.能透過操作進行歸納、推理，找出能否密鋪平面的規律，並拼出所有正則鑲嵌類型。	GSP 的操作環境與方法，並繪製正多邊形模板。 2.利用 GSP 與新繪製的模板進行正五邊形、正六邊形、正七邊形、正八邊形.....可以鋪滿整個平面嗎？哪些正多邊形可以？等問題的小組操弄、討論、結論歸納，並進行分享。	拼排類型/分組討論情形/結論歸納。	訊教師進行協同教學)。 2.分組製作模板，並進行拼排、討論與分享發表。 3.引導進行正多邊形鑲嵌之結論歸納
--	---	---	-------------------	---

單元名稱	二、鑲嵌藝數		上課節數	16 節
單元學習目標	1.能利用角度關係或代數分析的分法，拼出所有半正則鑲嵌類型。 2.能辨識與操弄半正則鑲嵌與不完全正則鑲嵌之圖形，並做出幾何上的解釋。 3.能了解對偶圖形與頂點圖形的意義，並畫出正則與半正則鑲嵌的對偶圖形與頂點圖形，且能加以解釋和分析。 4.能操作紙板或 GSP 提供的模版，將任意三角形和四邊形密鋪整個平面，並了解其能排出鑲嵌圖形的原因。 5.能熟悉動態幾何環境，學會如何測量多邊形的角與邊長，並進行方法可行性的檢驗，排出鑲嵌圖形的五邊形或六邊形。 6.能理解 M.C.Escher 等人在鑲嵌圖形設計上的方法，並運用平移、旋轉與鏡射等技巧創造屬於自己的鑲嵌圖形。			
學習情境與動機引發	訴說歐洲中古時期城邦國王「錦囊圖形難題」甄選城邦公主的丈夫之故事，引導學生觀察、欣賞圖片，運用二種或二種以上的正多邊形進行鑲嵌圖形的設計，投入情境式圖形密碼辨識與故事情節性創意發想。			
學習表現說明	活動學習目標	學習活動歷程	評量方法	教學策略
	5.能利用多邊形角度關係拼出半正則鑲嵌圖案類型。 6.能利用代數分析的方法，說明半正則鑲嵌圖形排列的合理性。	<b>活動三、城邦鑲嵌圖飾的排列(4 節)</b> 藉由「中古時期歐洲城邦界定由同一邊數的正多邊形構成的鑲嵌，稱為正則鑲嵌；而由二種或二種以上的正多邊形構成，在每一頂點處按照同樣的次序相遇時，就為半正則鑲嵌」。而學校地磚的鋪設有兩個半正則的例子如下圖。圖中以數學記號表示環繞每一個頂點的正多邊形類型，依此這兩圖形分別記為(3,6,3,6)、(3,3,3,3,6)。引導學生利用此規則探索以下問題：	形成性：多邊形模板操作/半正則鑲嵌圖形拼排類型與數量/二個正五邊形和一個正十邊形能在每個頂點處相遇的	1.分組教學，教師說明情境議題與圖形類型定義，並確認學生理解情形。 2.引導學生依循結構性問題進行分組拼排模板、討論並



		 <p>(3,6,3,6) (3,3,3,3,6)</p> <p>1.操弄模板、GSP，能拼出的半正則鑲嵌圖形有哪些？歸納其理由，並用數學記號表示不同類型。</p> <p>(1)分別計算正 3、4、5...20、24、30、36、40、42、45、72 及 N 邊形每一內角的度數。</p> <p>(2)用一個正三角形和另一種正多邊形鋪設鑲嵌圖形。依此正四邊形和另一種正多邊形鋪設鑲嵌圖形。...歸結由兩種正多邊形鋪成的鑲嵌圖案共有多少種？用三種正多邊形鋪成的鑲嵌圖案共有多少種？用數學記號表示出來。</p> <p>(3)承上，每種類型排序的方法可能不是唯一的，如(3,6,3,6) 就不是唯一的鋪法，利用模板再設計一種，記錄你的發現。</p> <p>(4)利用模板鋪設(3,4,4,6)、(3,4,6,4)，並記錄你的發現。</p> <p>2.利用模板證明，二個正五邊形和一個正十邊形能在每個頂點處相遇。(5,5,10)能排出半正則鑲嵌圖形嗎？</p> <p>3.利用邊長相等的 12 個正三角形和六個正方形，拼成一個正十二邊形。以此十二邊形為參考，利用邊長相等的正三角形和正方形模板拼出一個凸 11 邊形，它的內角各是多少度？</p>	<p>討論與分享。</p>	<p>發表。</p> <p>3.先開放性之探索，再引導先有猜測，後進行驗證。</p> <p>4.以代數的方式驗證凸 11 邊形內角的度數。</p>
	7.能辨識與排列半正則與不完全正則鑲嵌圖形。	<p><b>活動四、鑲嵌圖飾的變異性排列（1 節）</b></p> <p>如果在一個半正則鑲嵌圖形的頂點處，正多邊形的排列不同，這樣的鑲嵌圖形稱為不完全正則鑲嵌。具有二類頂點排序的稱為二律不完全</p>	<p>形成性： N 律不完全正則鑲嵌圖形的辨識/排列/美感設</p>	<p>1.教師說明情境議題與圖形類型定義，並確認學生理解情形。</p>

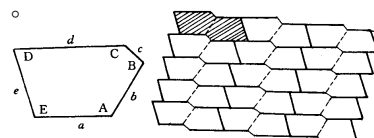
	<p>正則鑲嵌，而有三類頂點排序的就稱為三律不完全正則鑲嵌，....以此類推下圖是其中兩例。</p>  <p>1.下列各鑲嵌圖案的是何種類型？請以數字名稱表示出來。</p>  <p>2.請排出不完全正則鑲嵌圖案 3,12,12/3,4,3,12，並在紙上畫出此圖案，並進行著色。</p>	計。	2.提供特定問題與任務，引導學生操弄、探索、創作。
<p>8.能了解對偶圖形與頂點圖形的意義</p> <p>9.能畫出正則與半正則鑲嵌的對偶與頂點圖形，且能加以解釋和分析。</p> <p>10.能了解任意三角形和四邊形密鋪整個平面的原因。</p> <p>11.能排出非等邊五、六邊形的鑲嵌圖形並進行可行性的檢驗。</p>	<p><b>活動五、神秘電郵的圖形密碼(6節)</b></p> <p>以前一活動之圖案製作神秘電子郵件之密碼鎖視窗如下圖(一)。必需藉由輸入數學記號始能開啟觀看郵件內容為活動開端，進行「鑲嵌圖形對偶」與「頂點鑲嵌圖形」的說明。</p>  <p>(圖一)</p>  <p>(圖二)</p> <p>※上圖原為由正三角形所拼成的正則鑲嵌圖形，當我們越過鑲嵌的正三角形的公共邊，將每兩個相鄰正三角形的中心(外心)連接起來，就可以得到另一個正則鑲嵌圖形。這個新的正則鑲嵌圖形叫原來正則鑲嵌圖形的對偶。</p> <p>※另外，如果將原鑲嵌圖形得各邊中點當作新頂點，連接起來的新圖圖</p>	<p>形成性：正方形與正六邊形正則鑲嵌的對偶圖形/頂點鑲嵌圖形/任意三角形、四邊形都能鑲滿整個平面的理由/非正五、六邊形或圓弧形，能鑲滿整個平面的理由。</p>	<p>1.教師說明情境議題與圖形類型定義，並確認學生理解情形。</p> <p>2.引導學生依循結構性問題進行分組操弄排列與創作，並述明理由。</p>



形，則稱為原鑲嵌圖形的頂點鑲嵌圖形，如上圖（二）。

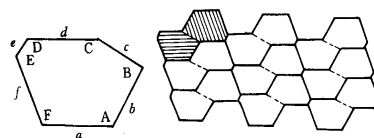
請學生依據上列說明內容，進行下列問題的操作與討論。

- 1.畫出正方形與正六邊形正則鑲嵌圖形的對偶圖形。
- 2.畫出正方形與正六邊形正則鑲嵌圖形的頂點鑲嵌圖形。
- 3.請選擇一半正則鑲嵌圖形，並畫出其對偶鑲嵌圖形(用不同顏色)，試判斷新圖形是否為正則或半正則鑲嵌圖形？
- 4.請選擇另一半正則鑲嵌圖形，並畫出其頂點鑲嵌圖形(用不同顏色)，試判斷新圖形是否為半正則鑲嵌圖形？
- 5.利用模板製作 12 個全等的不等邊三角形，然後拼拼看是否能拼成鑲嵌圖案。
- 6.任意凸四邊形都能拼成鑲嵌圖案嗎？請另設計二組由不同四邊形組成的鑲嵌圖案，並加以說明。
- 7.任意凹四邊形是否都能鑲滿整個平面嵌？請設計一組凹四邊形，試著創造一種鑲嵌圖案，並圖上你喜歡的顏色。
- 8.任意三角形或四邊形都能鑲滿整個平面嗎？請述明理由。
- 9.試試非正五邊形，它能鑲滿整個平面嗎？下圖是舉例，請再找出一例。

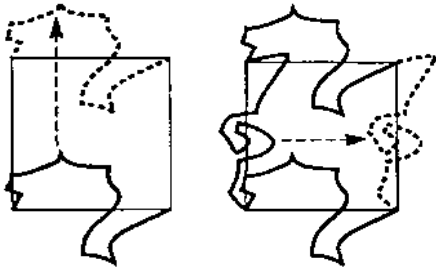
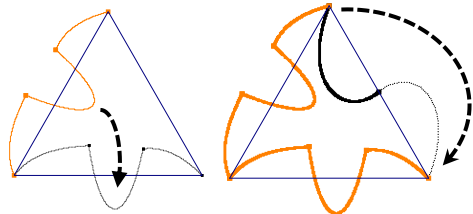



$$A+B+C = 360^{\circ}$$

- 10.試試非正六邊形或圓弧形，是否能鑲滿整個平面嗎？請述明理由。



$$A+B+C = 360^{\circ}, a = d$$

	<p>12.能理解 M.C.Escher 在鑲嵌圖形設計上的方法。</p> <p>13.能運用平移、旋轉與鏡射等技巧創造屬於自己的鑲嵌圖形。</p>	<p><b>活動六、寶物碎片（5 節）</b></p> <p>介紹荷蘭藝術家 M.C.Escher(1898～1972)的鑲嵌作品，分別就其把平移、旋轉、鏡射運用於正三角形、正六邊形或平行四邊形的網格中，創造出鳥類、魚類、爬蟲類和人類的鑲嵌作品之過程進行說明。</p> <p>【利用平移法則創造鑲嵌圖形】</p> <p>以正方形為背景舉例</p>  <p>1.請以菱形為鑲嵌背景，設計一個漂亮的圖形。</p> <p>【利用旋轉法則創造鑲嵌圖形】</p> <p>以正三角形為背景舉例</p>  <p>2.欣賞 M.C.Escher 的作品〈爬蟲〉，請試著分析這個圖案形成的過程。</p>  <p>3.請試著選擇一簡單圖形為鑲嵌背景，運用平移、旋轉、鏡射法則，設計一鑲滿平面的圖案，並塗上顏色。</p>	<p>形成性：以菱形為鑲嵌背景，設計一個明確形體之鑲嵌圖案。</p> <p>總結性：選擇一簡單圖形為鑲嵌背景，運用平移、旋轉或鏡射，設計一鑲滿平面的彩色圖案。</p>	<p>1.介紹藝術家的鑲嵌作品，藉由賞析引導學生了解創作的方式。</p> <p>2.教師舉例說明圖形變換法則並確認學生理解情形。</p> <p>3.引導學生依循結構性任務圖形變換之創作。</p> <p>4.分享作品並進行同儕互評。</p> <p>5.與視覺藝術教師進行協同教學。</p>
--	--	--	---	---

